1- اگر $f=\left\{\left(1.2\right).\left(2.5\right).\left(0.3\right).(4.-1)\right\}$ و $g=\left\{\left(2.3\right).\left(-1.4\right).\left(4.1\right).(3.0)\right\}$ تابع $gof^{-1}$ کدام است؟

1) $gof^{-1}\left(x\right)=\left\{\left(0.0\right).(1.3)\right\}$ 2) $gof^{-1}\left(x\right)=\left\{\left(2.4\right).(3.5)\right\}$

3) $gof^{-1}\left(x\right)=\left\{\left(2.0\right).(-1.4)\right\}$ 3) $gof^{-1}\left(x\right)=\left\{\left(5.3\right).(-1.1)\right\}$

2- اگر $f\left(x\right)=x\left|x\right|$ باشد نمودار تابع $y=f^{-1}\left(x\right)$ *کدام است؟*

*3- ضابطه ی وارون تابع* $y=\left\{\begin{array}{c}\sqrt{x} ; \&x\geq 0\\-\sqrt{-x} ;x<0\end{array}\right.$ *کدام است؟*

*1)* $f^{-1}\left(x\right)=x\left|x\right|;x \in R$ *2)* $f^{-1}\left(x\right)=-x^{2} ;x<0$

*3)* $f^{-1}\left(x\right)=\pm x^{2} ;x\in R$ *4)* $f^{-1}\left(x\right)=\pm x\left|x\right|;x \in R$

4- قرینه ی خط به معادله ی$3y-2x=4$ را نسبت به خط $y=x$ خط $d$ *می نامیم عرض از مبدا خط* $d$ *کدام است؟*

*۱)* $-2$ *2)* $-1$ *3)* $1$ *4)* $2$

*5- اگر* $f\left(x\right)=\frac{2}{5}x-4$ *و* $g\left(x\right)=x^{3}+x$ *باشند مقدار* $(g^{-1}of^{-1})(8)$ *کدام است؟*

*1)* $1/5$ *2)* $2$ *3)* $2/5$ *4)* $3$

*6-ضابطه ی معکوس تابع* $y=2-\sqrt{x-1}$ *به کدام صورت است؟*

*1)* $f^{-1}\left(x\right)=x^{2}-4x+5 :x\leq 2$ *2)* $f^{-1}\left(x\right)=-x^{2}-4x-5 :x\leq 2$

*3)* $f^{-1}\left(x\right)=x^{2}-4x+5 :x\geq 1$ *4)*$f^{-1}\left(x\right)=-x^{2}-4x-5 :x\geq 1 $

*7- ضابطه ی وارون تابع* $f\left(x\right)\left\{\begin{array}{c}\sqrt{x} ; \&x\geq 0\\-\sqrt{-x} ;x<0\end{array}\right.$ *کدام است؟*

*1)* $f^{-1}\left(x\right)=-x^{2}$ *2)* $f^{-1}\left(x\right)=-x^{2}$

 *3)* $f^{-1}\left(x\right)=x\left|x\right|$ *4)* $f^{-1}\left(x\right)=-x\left|x\right|$

*8- دو تابع* $f=\left\{\left(5.2\right).\left(7.3\right).\left(1.4\right).\left(3.6\right).(9.1)\right\}$ *و* $g\left(x\right)=\sqrt{5x+9}$ *مفروض اند. اگر* $\left(g^{-1}of^{-1}\right)\left(a\right)=8$ *باشد* $a$ *کدام است؟*

*1) 2 2) 3 3) 6 4) 7*

*9- اگر* $f\left(x\right)=x^{2}-2x-3 ;x\geq 1$ *باشد نمودار های دو تابع* $f^{-1}$ *و* $g\left(x\right)=\frac{x-9}{2}$ *با کدام طول متقاطع هستند؟*

*1) 12 2) 15 3) 18 4) 21*

*10-اگر رابطه ی* $f=\left\{\left(3.2\right).\left(a.5\right).\left(3.a^{2}-a\right).\left(b.2\right).(-1.4)\right\}$ *تابع یک به یک باشد دوتایی* $\left(a.b\right)$ *کدام است؟*

*1)* $(-1.1)$ *2)* $(-1.3)$ *3)* $2.1)$) 4) $\left(2.3\right)$

*11- تابع با ضابطه ی* $f\left(x\right)\left\{\begin{array}{c}x^{3} ; \&x\geq 0\\-x^{2} ;x<0\end{array}\right.$ *در مجموعه ی اعداد حقیقی چگونه است؟*

*1) یک به یک – اکیدا صعودی 2) یک به یک – نزولی*

 *3) یک به یک – غیریکنواخت 4) غیر یک به یک – غیر یکنواخت*

*12- اگر* $f=\left\{\left(1.2\right).\left(2.5\right).\left(3.4\right).(4.6)\right\}$ *و* $g=\left\{\left(-2.0\right).\left(0.3\right).\left(1.-1\right).(3.2)\right\}$ *باشند تابع* $\frac{g}{gof^{-1}}$ *کدام است؟*

*1)* $\left\{\left(4.2\right).(5.2)\right\}$ *2)* $\left\{\left(4.2\right).(3.5)\right\}$ *3)* $\left\{\left(5.2\right).(2.4)\right\}$ *4)* $\left\{\left(3.5\right).(2.4)\right\}$

*13- اگر* $f\left(x\right)=x^{2}-\sqrt{3x}$ *و* $g=\left\{\left(-2.0\right).\left(0.3\right).\left(1.-1\right).(3.-2)\right\}$ *آنگاه حاصل* $\left(gof^{-1}\right)\left(-2\right)$ *کدام است؟*

*1) صفر 2) 3 3) 6 4) تعریف نشده*

*14- اگر* $f\left(x\right)=x+x\left|x\right|$ *با دامنه* $\left[-1.2\right)$ *در نظر گرفته شود تعداد اعداد صحیح در دامنه تابع* $f^{-1}of$ *کدام است؟*

*1) 3 2) 8 3) 2 4) 6*

*15- اگر تابع* $f\left(x\right)=x^{2}+\left(a+1\right)x+3$ *برای* $x\geq 3$ *یک به یک باشد کم ترین مقدار* $a$ *کدام است*؟

1) $\frac{3}{2}$ 2) 6- 3) 5 4) 7-

**پاسخنامه تشریحی**

1- گزینه 4

$f^{-1}=\left\{\left(2.1\right).\left(5.2\right).\left(3.0\right).(-1.4)\right\} . g=\left\{\left(2.3\right).\left(-1.4\right).\left(4.1\right).(3.0)\right\}$

$$gof^{-1}\left(x\right)=g\left(f^{-1}\left(x\right)\right)= \left.\begin{matrix}g\left(f^{-1}\left(2\right)\right)=g\left(1\right)=∅\\g\left(f^{-1}\left(5\right)\right)=g\left(2\right)=3\\g\left(f^{-1}\left(3\right)\right)=g\left(0\right)=∅ g\left(f^{-1}\left(-1\right)\right)=g\left(4\right)=1\end{matrix}\right\}gpf^{-1}\left(x\right)=\left\{\left(5.3\right).(-1.1)\right\}$$

2- گزینه 3

$$f\left(x\right)=x\left|x\right|=\left\{\begin{array}{c}x^{2} x\geq 0\\-x^{2} x<0 \end{array}\right.$$

برای رسم تابع معکوس کافی است قرینه ی شکل را نسبت به نیمساز ناحیه ی اول و سوم رسم کنیم.

3- گزینه 1

روش اول

$$بالا ی ضابطه: \sqrt{x} . x\geq 0\rightarrow y\geq 0 \rightarrow y^{2}=x \rightarrow f^{-1}\left(x\right)=x^{2} . x\geq 0$$

$$پایین ی ضابطه:y=-\sqrt{-x} . x<0 \rightarrow y<0 \rightarrow y^{2}=-x \rightarrow x=-y^{2}\rightarrow f^{-1}\left(x\right)=-x^{2} . x<0$$

*بنابراین ضابطه ی تابع وارون به صورت* $f^{-1}(x)=\left\{\begin{array}{c}x^{2} \&x\geq 0\\-x^{2} x<0\end{array}\right.$ *و یا به صورت* $f^{-1}\left(x\right)=x\left|x\right|;x \in R$ *است.*

*روش دوم:*

*یک* $x$ *دلخواه در تابع قرار می دهیم.*

$$x=4\rightarrow y=2 \left|\begin{array}{c}4\\2\end{array} \in f \rightarrow \left|\begin{array}{c}2\\4\end{array} \in f^{-1}\right.\right.$$

گزینه ای درست است که اگر به جای $x$ آن 2 قرار دهیم حاصل 4 می شود. ( گزینه ی اول)

4- گزینه 1 : دو تابع $f^{-1} و f$ نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند و می دانیم برای پیدا کردن ضابطه ای معکوس یک تابع ابتدا رابطه را برحسب $x$ به دست می آوریم و سپس جای $x$ و $y$ *را عوض می کنیم.*

$$3y-2x=4\rightarrow 2x=3y-4\rightarrow x=\frac{3}{2}y-2\rightarrow f^{-1}\left(x\right)=\frac{3}{2}x-2 → مبدا از عرض= -2$$

5- گزینه 4 می دانیم اگر $f\left(a\right)=b$ باشد آنگاه $f^{-1}\left(b\right)=a$ است.

$$(g^{-1}of^{-1})\left(8\right)=g^{-1}(f^{-1}\left(8\right))$$

برای محاسبه $f^{-1}\left(8\right)$ بدین صورت عمل می کنیم:

$$8=\frac{2}{5}x-4\rightarrow \frac{2}{5}x=12\rightarrow 2x=60\rightarrow x=30$$

$$پس : g^{-1}\left(f^{-1}\left(8\right)\right)=g^{-1}(30)$$

*برای محاسبه* $g^{-1}(30)$ *بدین صورت عمل می نماییم:*

$$30=x^{3}+x\rightarrow x=3$$

6- گزینه 1

ابتدا $x$ را برحسب $y$ به دست می آوریم و سپس جای $y و x$ را عوض می کنیم.

$$y=2-\sqrt{x-1}\rightarrow (\sqrt{x-1)}^{2}=\left(2-y\right)^{2}=\left(2-y\right)^{2}\rightarrow x-1=4-4y+y^{2}\rightarrow x=y^{2}-4y+5\rightarrow f^{-1}\left(x\right)=x^{2}-4x+5 . x\leq 2$$

*چون* $\sqrt{x-1}$ *مثبت است پس* $-\sqrt{x-1}$ *منفی بوده و* $y=2-\sqrt{x-1}$ *همواره کوچک تر مساوی 2 می شود بنابراین دامنه تابع معکوس* $x\leq 2$ *است.*

*7- گزینه 3 روش اول: برای پیدا کردن ضابطه ی وارون یک تابع کافی است* $x$ *را بر حسب* $y$ *به دست آورده و سپس* جای $y و x$ را عوض می کنیم.

$$\rightarrow f^{-1}\left(x\right)=x\left|x\right|$$

$$y=\sqrt{x} . x\geq 0 \rightarrow y^{2}=x\rightarrow f^{-1}\left(x\right)=x^{2} . x\geq 0$$

$$y=-\sqrt{-x}. x<0\rightarrow y^{2}=-x\rightarrow x=-y^{2}\rightarrow f^{-1}\left(x\right)=-x^{2}. x<0$$

*روش دوم: تست را به وش عددگذاری حل می کنیم و می دانیم اگر* $f\left(a\right)=b$ *باشد آنگاه* $f^{-1}\left(b\right)=a$ *است.*

$$x=4→ y=2\rightarrow A\left|\begin{array}{c}4\\2\end{array} \in f\rightarrow A^{'} \left|\begin{array}{c}2\\4\end{array} \in \right. f^{-1}\rightarrow \right.شوند می حذف چهارم و اول های گزینه $$

$$x=-4→ y=-2\rightarrow B\left|\begin{array}{c}-4\\-2\end{array} \in f\rightarrow B^{'} \left|\begin{array}{c}-2\\-4\end{array} \in \right. f^{-1}\rightarrow \right. شود می حذف دوم ی گزینه$$

8- گزینه 2 می دانیم اگر $f\left(a\right)=b$ باشد انگاه $f^{-1}\left(b\right)=a$ است.

$$g^{-1}of^{-1}\left(a\right)=8\rightarrow g^{-1}\left(f^{-1}\left(a\right)\right)=8\rightarrow f^{-1}\left(a\right)=g\left(8\right)\rightarrow f^{-1}\left(a\right)=\sqrt{5\left(8\right)+9}=\sqrt{49}=7\rightarrow f^{-1}\left(a\right)=7\rightarrow f\left(7\right)=a\rightarrow a=3$$

9- گزینه 4 برای پیدا کردن تابع وارون *کافی است* $x$ *را بر حسب* $y$ *به دست آورده و سپس* جای $y و x$ را عوض می کنیم.

$$f\left(x\right)=x^{2}-2x-3\rightarrow y=\left(x-1\right)^{2}-1-3 \rightarrow y=\left(x-1\right)^{2}-4 \rightarrow \left(x-1\right)^{2}=y+4\rightarrow x-1=\pm \sqrt{\left(y+4\right)}→ x-1=\sqrt{y+4}\rightarrow f^{-1}\left(x\right)=1+\sqrt{x+4}$$

$$f^{-1}\left(x\right)=g\left(x\right)\rightarrow 1+\sqrt{x+4}=\frac{x-9}{2}→ x=21$$

توجه کنید حل معادله آخر بدین صورت است:

$$2\sqrt{x+4}=x-11→ 4x+16=x^{2}+121-22x \rightarrow x^{2}-26x+105=0\rightarrow \left(x-21\right)\left(x-5\right)=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{c}x=21 قبول قابل\\x=5 قبول قابل غیر\end{array}\right.$$

10- گزینه 4 الف) شرط تابع بودن : هیچ دو زوج مرتب متمایز مولفه ی اول برابر نداشته باشد.

$$\left(3.2\right)=\left(3.a^{2}-a\right)=a^{2}-a-2=0\rightarrow \left(a-2\right)\left(a+1\right)=0\rightarrow \left\{\begin{array}{c}a=2\\a=-1\end{array}\right.$$

ب) شرط یک به یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز مولفه ی دوم برابر نداشته باشد.

$$\left(3.2\right)=\left(b.2\right)\rightarrow b=3$$

اما از میان دو مقدار به دست آمده برای $a$ باید یکی را به گونه ای انتخاب کنیم که شرایط الف و ب کماکان برقرا بماند. در نتیجه فقط $a=2$ قابل قبول می باشد. زیرا اگر $a=-1$ باشد دو زوج مرتب $\left(-1.5\right) و (-1.4)$ در مجموعه دیده می شوند که در آن صورت مجموعه حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه $\left(a.b\right)=(2.3)$ می باشد.

11- گزینه 1

با رسم شکل به راحتی میتوان دید که این تابع یک به یک و اکیدا صعودی است زیرا :

اولا: هیچ خط موازی محور $x$ *ها نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نمی کند پس تابع یک به یک است.*

*ثانیا: به ازای هر* $f(x\_{1})<f\left(x\_{2}\right) x\_{1}<x\_{2}$ *می باشد.*

*12- گزینه 1*

$$f=\left\{\left(1.2\right).\left(2.5\right).\left(3.4\right).(4.6)\right\}\rightarrow f^{-1}=\left\{\left(2.1\right).\left(5.2\right).\left(4.3\right).(6.4)\right\}$$

$$gof^{-1}\left(x\right):\left\{\begin{array}{c}g\left(f^{-1}\left(2\right)\right)=g\left(1\right)=∅\\g\left(f^{-1}\left(5\right)\right)=g\left(2\right)=3\\g\left(f^{-1}\left(4\right)\right)=g\left(3\right)=1\\g\left(f^{-1}\left(6\right)\right)=g\left(4\right)=2\end{array}\rightarrow \right.gof^{-1}\left(x\right)=\left\{\left(5.3\right).\left(4.1\right).(6.2)\right\}$$

$$پس:\frac{g(x)}{gof^{-1}(x)}=\left\{\left(4.\frac{2}{1}\right).(5.\frac{6}{3})\right\}=\left\{\left(4.2\right).(5.2)\right\}$$

*13- گزینه 3*

$$g=\left\{\left(-2.0\right).\left(0.3\right).\left(1.-1\right).\left(3.-2\right)\right\}\rightarrow g^{-1}=\left\{\left(0.-2\right).\left(3.0\right).\left(-1.1\right).(-2.3)\right\}$$

$$پس:\left(fog^{-1}\right)\left(-2\right)=f\left(g^{-1}\left(-2\right)\right)=f\left(3\right)=9-\sqrt{9}=9-3=6$$

*14- گزینه 1 می دانیم که* $D\_{f^{-1}of}=D\_{f}$ *است پس تعداد اعداد صحیح در این بازه برابر با 3 است یعنی اعداد* $(-1.0.1)$

*15- گزینه 4 تابع درجه 2 برای* $x\leq \left(\frac{-b}{2a}\right) یا x\geq (\frac{-b}{2a})$ *یک به یک است. چون در این حالت خطوط موازی محور* $x$ *ها را حداکثر در یک نقطه قطع می کند. لذا در این مسئله داریم:*

$$-\frac{b}{2a}=\frac{-\left(a+1\right)}{2}\leq 3\rightarrow a+1\geq -6\rightarrow a\geq -7$$